Qu'estiment vraiment les bandelettes en traitement d'images ?

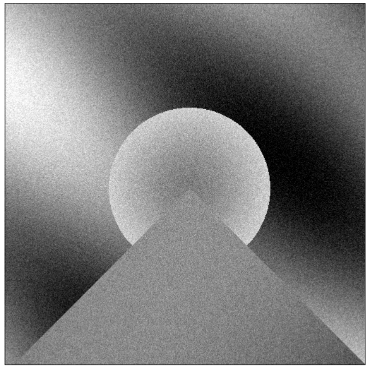
Bandelettes, sélection de modèles et maxisets

E. Le Pennec / LPMA / Université Denis Diderot - Paris VII
S. Mallat, Ch. Dossal et G. Peyré,
F. Autin, J.-M. Loubes et V. Rivoirard

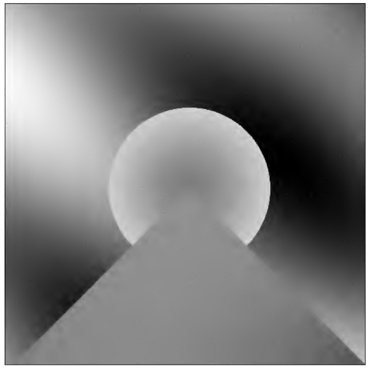
17 Octobre 2006

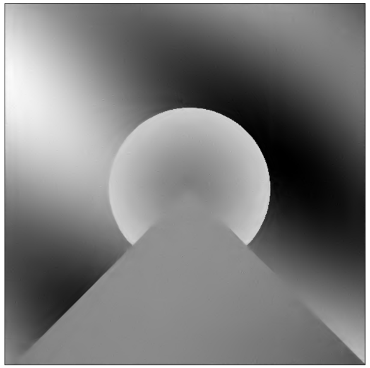
Estimation, Géométries et Bandelettes

Bruitée



Estimation — Sans géométrie — Avec géométrie





- Estimation dans un modèle de bruit blanc gaussien : $Y = f + \epsilon W$.
- Estimation de f dans des bases : seuillage et sélection de modèles.
- Nécessité d'avoir une représentation creuse (approximation, maxiset).
- Efficacité provient d'une forme de régularité.
- Images : importance de la géométrie.
- Estimation géométrique des images en bandelettes.

Plan

- Estimation dans une base et approximation.
- Signaux 1D : Fourier et ondelettes.
- Images 2D et ondelettes.
- Représentation des images géométriques.
- Bandelettes pour les images géométriques.
- Sélection de modèles et optimalité.
- Bases multiéchelles de bandelettes.

Estimation et modèle de bruit blanc

- Modèle de bruit blanc :

$$dY = f(t)dt + \epsilon dW \quad .$$

- Dans la suite, projection sur un espace de dimension N et calibrage $\epsilon = \frac{1}{\sqrt{N}}$ (lien avec la régression) :

$$Y = f + \frac{1}{\sqrt{N}} W \quad .$$

- Propriétés de f : propriétés dans le domaine continu.
- Estimateur de F : fonction de Y.
- Critère : risque quadratique

$$E(\|f - F\|^2)$$

Estimation oracle dans une base

- Décomposition de $Y = f + \frac{1}{\sqrt{N}} W$ dans une base orthonormée

$$Y = \sum_{b_n} \langle Y, b_n \rangle b_n = \sum_{b_n} \left(\langle f, b_n \rangle + \frac{1}{\sqrt{N}} \langle W, b_n \rangle \right) b_n \quad .$$

- Estimateur F par sélection de coordonnées :

$$F = Y_\Gamma = \sum_{n \in \Gamma} \langle Y, b_n \rangle b_n \quad .$$

- Minimisation du risque quadratique :

$$E(\|f - F\|^2) = \sum_{n \notin \Gamma} |\langle f, b_n \rangle|^2 + \sum_{n \in \Gamma} \frac{1}{N} \quad .$$

- Solution : $\Gamma_O = \{n, |\langle f, b_n \rangle| \geq \frac{1}{\sqrt{N}}\}$ et $F_O = Y_{\Gamma_0}$.
- Problème : demande la connaissance de f ! (Oracle$\neq$estimateur)

Oracle, risque et approximation

- Risque quadratique de l'estimateur oracle F_O :

$$E(\|f - F_O\|^2) = \sum_{n \notin \Gamma_O} |\langle f, b_n \rangle|^2 + \sum_{n \in \Gamma_O} \frac{1}{N}$$

$$E(\|f - F_O\|^2) = \|f - f_{\Gamma_O}\|^2 + \frac{1}{N}|\Gamma_O| \quad .$$

- Compromis entre erreur d'approximation et nombre de termes.
- Théorie de l'approximation :

$$E(\|f - F_O\|^2) = \|f - f_{\Gamma_O}\|^2 + \frac{1}{N}|\Gamma_O| \leq C \left(\frac{1}{N}\right)^{\frac{\beta}{\beta+1}}$$

$$\Leftrightarrow \|f - f_M\|^2 \leq C M^{-\beta} \Leftrightarrow f \in \mathcal{A}^{\beta} \quad .$$

- Minimax : pour Θ, classe de fonctions, quelle base donne $\Theta \subset \mathcal{A}^{\beta}$ avec β optimal ? ($\left(\frac{1}{N}\right)^{\frac{\beta}{\beta+1}}$ vitesse minimax).
- Maxiset : pour une base fixée, quelle est l'ensemble des fonctions estimées avec une vitesse $\left(\frac{1}{N}\right)^{\frac{\beta}{\beta+1}}$? Ici $\mathcal{A}^{\beta}$.

Estimateur par seuillage

- Oracle : $\Gamma_O = \{n, |\langle f, b_n\rangle| \geq \frac{1}{\sqrt{N}}\}$ et $F_O = Y_{\Gamma_0}$.
- Stratégie : garder les grands coefficients.
- Seuillage : $\Gamma_S = \{n, |\langle Y, b_n\rangle| \geq T\left(\frac{1}{\sqrt{N}}\right)\}$ et $F_S = Y_{\Gamma_S}$.
- **Théorème (*Donoho, Johnstone*) :** Si $T\left(\frac{1}{\sqrt{N}}\right) = \lambda\sqrt{\frac{\log N}{N}}$, alors

$$E(\|f - F_S\|^2) \leq C(\log N)E(\|f - F_O\|^2)$$

$$E(\|f - F_S\|^2) \leq C \min_{\Gamma} \|f - f_\Gamma\|^2 + \lambda^2 \frac{\log N}{N}|\Gamma| \quad \text{plus fin.}$$

- **Théorème (Maxiset) (*Cohen, DeVore, Kerkyacharian, Picard*) :**

$$E(\|f - F_S\|^2) \leq C\left(\frac{\log N}{N}\right)^{\frac{\beta}{\beta+1}} \Leftrightarrow f \in V^*_{\frac{2\beta}{\beta+1}}$$

$$\Leftrightarrow \min_{\Gamma} \|f - f_\Gamma\|^2 + \lambda^2 T^2 |\Gamma| \leq C(T^2)^{\frac{\beta}{\beta+1}}$$

$$\Leftrightarrow \|f - f_M\|^2 \leq C M^{-\beta} \Leftrightarrow f \in \mathcal{A}^\beta \quad .$$

- Importance du choix de la base !

Fonctions $\mathbf{C}^\alpha$ et Fourier

- Approche minimax pour les fonctions $\mathbf{C}^\alpha$.
- Fonctions $\mathbf{C}^\alpha$: vitesse minimax $\left(\frac{1}{N}\right)^{\frac{2\alpha}{2\alpha+1}}$ $(\beta = 2\alpha)$.
- Approximation dans la base de Fourier :
$$\|f - f_M\|^2 \leq C M^{-2\alpha} \quad .$$
- Seuillage dans la base de Fourier :
$$E(\|f - F_S\|^2) \leq C \left(\frac{\log N}{N}\right)^{\frac{2\alpha}{2\alpha+1}} \quad .$$
- Vitesse quasi optimale !
- Approche maxiset pour les vitesses $\left(\frac{\log N}{N}\right)^{\frac{2\alpha}{2\alpha+1}}$:
$$E(\|f - F_S\|^2) \leq C \left(\frac{\log N}{N}\right)^{\frac{2\alpha}{2\alpha+1}} \Leftrightarrow f \in \mathcal{A}^{2\alpha} = \mathcal{W}H^\alpha$$
avec $\mathcal{W}H^\alpha$ version faible de H^α.
- Minimax-Maxiset :
$$\forall f \in \mathbf{C}^\alpha, E(\|f - F_S\|^2) \leq C \left(\frac{\log N}{N}\right)^{\frac{2\alpha}{2\alpha+1}} \Leftrightarrow \mathbf{C}^\alpha \subset \mathcal{W}H^\alpha \quad .$$

Fonctions $\mathbf{C}^\alpha$ par morceaux et Fourier

- Fonctions $\mathbf{C}^\alpha$ par morceaux : vitesse minimax $(\frac{1}{N})^{\frac{2\alpha}{2\alpha+1}}$ $(\beta = 2\alpha)$.
- Approximation dans la base de Fourier $(\alpha > 1)$:

$$\|f - f_M\|^2 \leq CM^{-2} \quad .$$

- Seuillage dans la base de Fourier $(\alpha > 1)$:

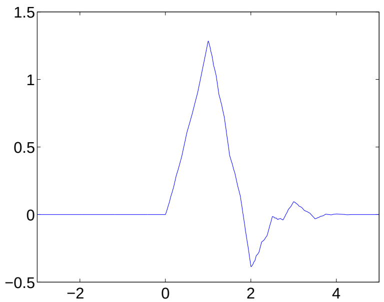
$$E(\|f - F_S\|^2) \leq C \left(\frac{\log N}{N}\right)^{\frac{2}{2+1}} \quad .$$

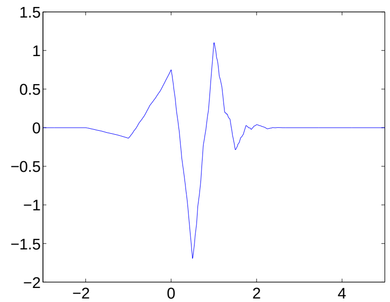
- Maxiset : $\mathbf{C}^\alpha$ par morceaux $\subset \mathcal{A}^2 = \mathcal{W}H^1$.
- mais $\mathbf{C}^\alpha$ par morceaux $\not\subset \mathcal{A}^{2\alpha} = \mathcal{W}H^\alpha$.
- Pour obtenir la vitesse minimax, $\mathbf{C}^\alpha$ par morceaux $\subset \mathcal{A}^{2\alpha}$.
- Besoin d'autres bases pour atteindre la vitesse minimax !

Base d'ondelettes 1D de $L^2[0,1]$

- Construite à partir d'une fonction d'échelle $\phi(x)$ et d'une ondelette mère $\psi(x)$

$\phi(x)$



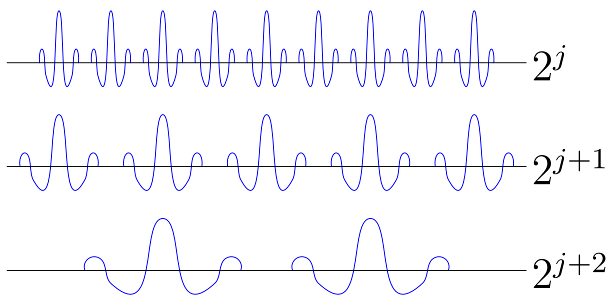


$\psi(x)$

qui sont dilatées par 2^j et translatées de $2^j n$

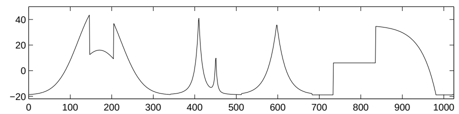
$$\phi_{j,n}(x) = \frac{1}{\sqrt{2^j}}\,\phi\Big(\frac{x-2^j n}{2^j}\Big) \quad , \quad \psi_{j,n}(x) = \frac{1}{\sqrt{2^j}}\,\psi\Big(\frac{x-2^j n}{2^j}\Big) \quad .$$

- $\mathbf{B} = \Big\{\psi_{j,n}\Big\}_{j\in\mathbb{N}\,,\,2^j n\in[0,1)}$ est une base orthonormale de $L^2[0,1]$.

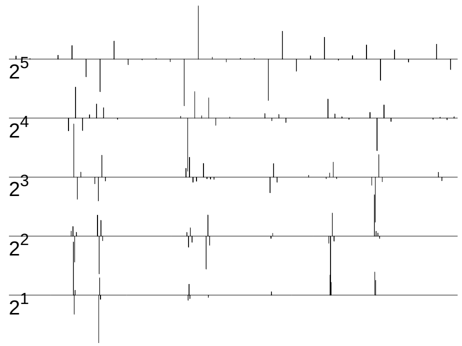


Approximation non linéaire en ondelettes

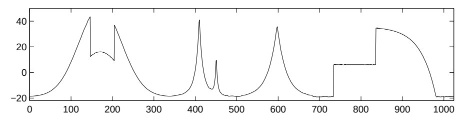
f



$\langle f \, , \, \psi_{j,n} \rangle$



f_M



- Si f est $\mathbf{C}^\alpha$ par morceaux et ψ a $p > \alpha$ moments nuls alors

$$\|f - f_M\|^2 \leq C \, M^{-2\alpha} \quad .$$

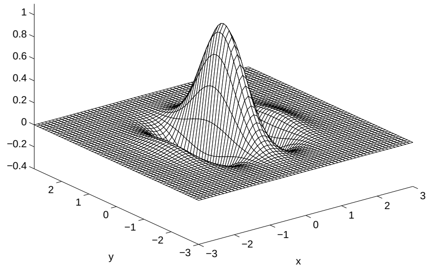
- Risque de l'estimateur par seuillage : $E(\|f - F_S\|^2) \leq C \left(\frac{\log N}{N}\right)^{\frac{2\alpha}{2\alpha+1}}$ (quasi optimal).
- Maxiset associé à la vitesse $\left(\frac{\log N}{N}\right)^{\frac{2\alpha}{2\alpha+1}}$ (*C, DV, K, P, Autin, Rivoirard*) : $\mathcal{W}B^{\alpha}_{2/(2\alpha+1),2/(2\alpha+1)}$ version faible de $B^{\beta/2}_{2/(2\alpha+1),2/(2\alpha+1)}$.
- Clé : $\mathbf{C}^\alpha$ par morceaux $\subset \mathcal{W}B^{\alpha}_{2,\infty}$.

Base d'ondelettes 2D séparables

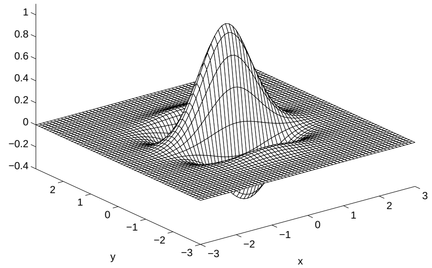
- La famille

$$\left\{ \begin{array}{ccc} \phi_{j,n_1}(x_1)\,\psi_{j,n_2}(x_2) & , & \psi_{j,n_1}(x_1)\,\phi_{j,n_2}(x_2) \\ & , & \psi_{j,n_1}(x_1)\,\psi_{j,n_2}(x_2) \end{array} \right\}_{(j,n_1,n_2)\in\mathbb{Z}^3}$$

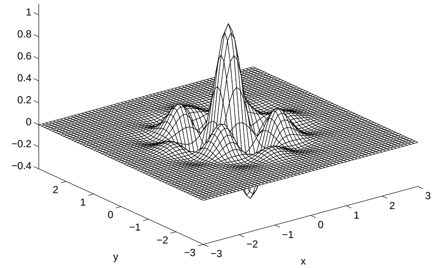
est une base orthonormée de $L^2[0,1]^2$.



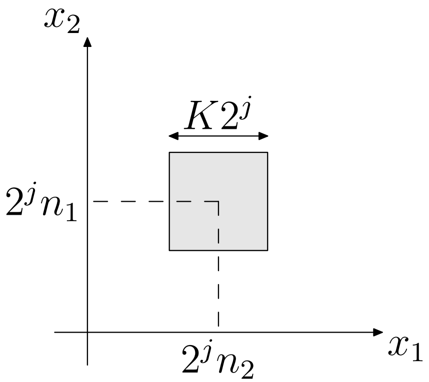
$\phi_{j,n_1}(x_1)\,\psi_{j,n_2}(x_2)$



$\psi_{j,n_1}(x_1)\,\phi_{j,n_2}(x_2)$



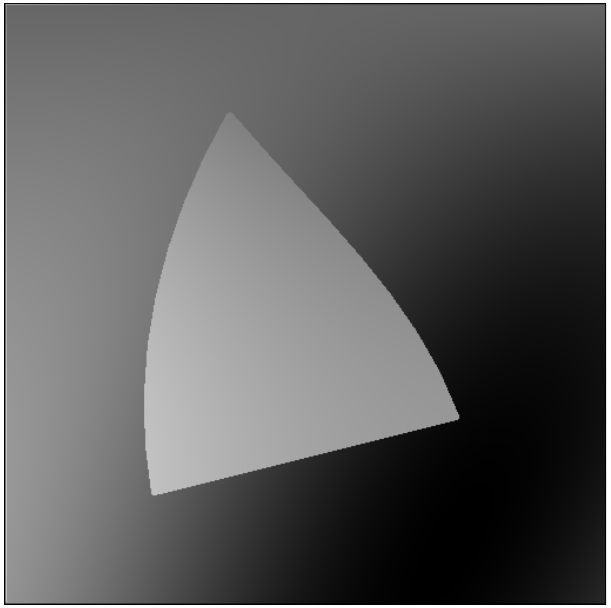
$\psi_{j,n_1}(x_1)\,\psi_{j,n_2}(x_2)$

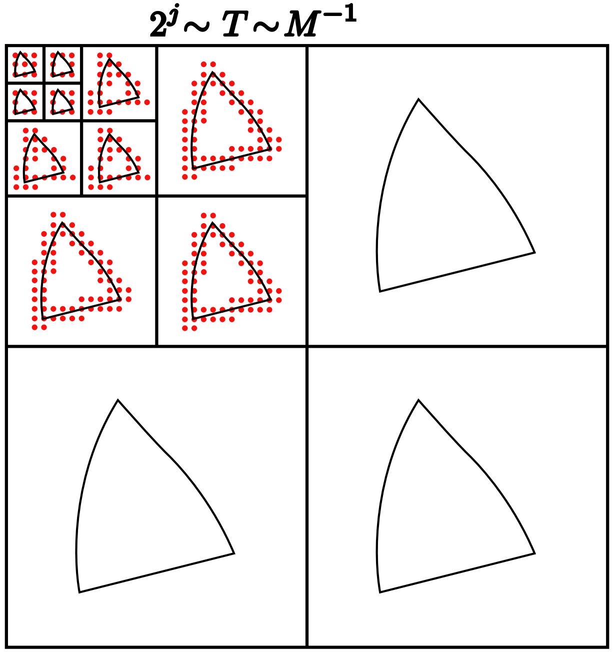


Support
des ondelettes
isotropes

Seuillage en ondelettes 2D

- Maxiset associé à la vitesse $\left(\frac{\log N}{N}\right)^{\frac{\beta}{\beta+1}}$: $\mathcal{A}^{\beta} = \mathcal{W}B^{\beta}_{2/(2\beta+1),2/(2\beta+1)}$ avec $\mathcal{W}B^{s}_{p,q}$ version faible de $B^{s}_{p,q}$.
- Pour f $\mathbf{C}^{\alpha} - \mathbf{C}^{\alpha}$ ($\mathbf{C}^{\alpha}$ en dehors de contours $\mathbf{C}^{\alpha}$) (*Korostelev, Tsybakov*) : vitesse minimax $(\frac{1}{N})^{\frac{\alpha}{\alpha+1}}$ ($\beta = \alpha$).
- Pb : $\mathbf{C}^{\alpha} - \mathbf{C}^{\alpha} \not\subset \mathcal{W}B^{\alpha}_{2/(2\alpha+1),2/(2\alpha+1)}$, au mieux $\mathbf{C}^{\alpha} - \mathbf{C}^{\alpha} \subset BV \subset \mathcal{W}B^{1}_{2/3,2/3}$



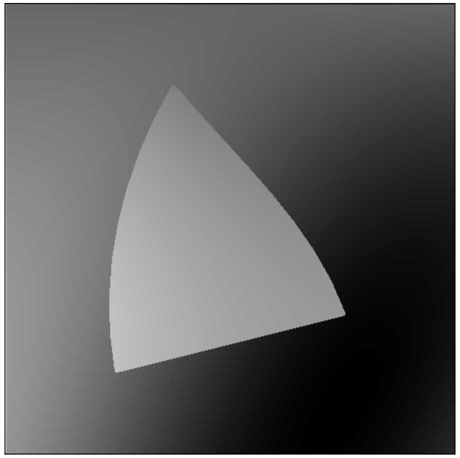
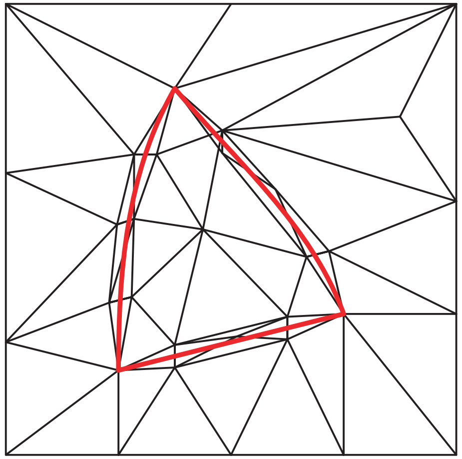


.

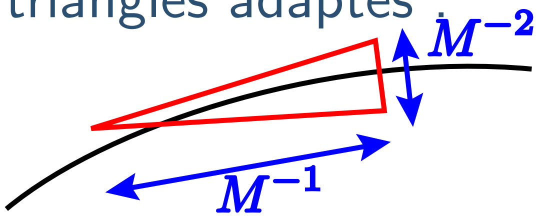
- Pb d'approximation : avec M ondelettes $\|f - f_M\|^2 \leq C\, M^{-1}$.
- Besoin de $\|f - f_M\|^2 \leq C\, M^{-\alpha}$ pour le risque minimax.

Éléments géométriques pour les contours

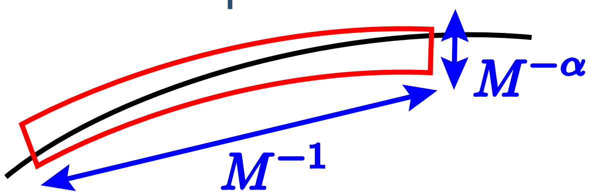
- Approximation de f qui est $\mathbf{C}^\alpha$ en dehors de contours $\mathbf{C}^\alpha$:

- Approximation linéaire par morceau sur M triangles adaptés :
  si $\alpha \geq 2$ alors $\|f - f_M\|^2 \leq C\, M^{-2}$.



- Approximation d'ordre élevé avec M "éléments" adaptés :
  $\|f - f_M\|^2 \leq C\, M^{-\alpha}$.



- Pas de bases et optimisation difficile.

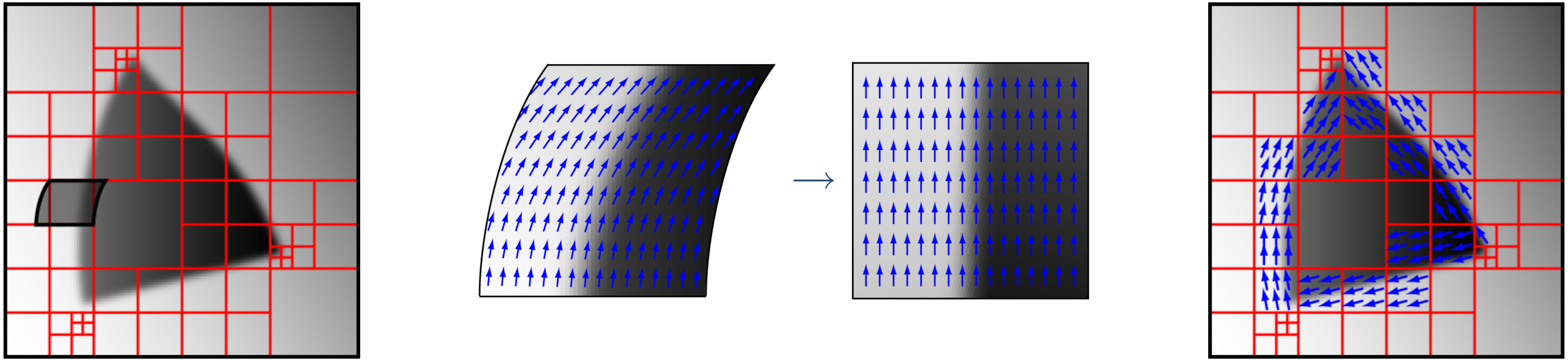
Curvelets

- Les curvelets définissent un "tight frame" de $L^2[0,1]^2$ avec des éléments allongés et orientés (*Candes, Donoho*) : $\{c_j(R_\theta x - \eta)\}_{j,\theta,\eta}$
- Si f est $\mathbf{C}^\alpha - \mathbf{C}^\alpha$ alors avec M curvelets :

$$\|f - f_M\|^2 \leq C\,(\log M)^3\,M^{-2} \quad \text{si } \alpha \geq 2.$$

- Quasi optimal pour $\alpha = 2$.
- Discrétisation complexe et difficultés pour obtenir des bases orthogonales ou des bases de Riesz.

Bandelettes



- Image $\mathbf{C}^\alpha - \mathbf{C}^\alpha$ simple par morceaux.
- Déformation locale $\Longrightarrow$ singularité verticale/horizontale .
- Bandelettes locales : préimage d'une base adaptée.
- Base de bandelettes définie par :
  - une segmentation dyadique et
  - une géométrie dans chaque carré.
- **Théorème :** Si f est $\mathbf{C}^\alpha - \mathbf{C}^\alpha$, alors, dans la meilleure base,

$$\|f - f_M\|^2 \leq C(\log M) M^{-\alpha} \quad .$$

- Famille de bases avec un algorithme de recherche de meilleure base.

Seuillage et sélection de modèles

- Retour sur l'estimateur oracle.
- Risque oracle : $\Gamma_0 = \mathrm{argmin}_\Gamma \|f - f_\Gamma\|^2 + \frac{1}{N}|\Gamma| \quad .$
- Analogue empirique : $\Gamma_S = \mathrm{argmin}_\Gamma \|Y - Y_\Gamma\|^2 + \frac{\lambda_N}{N}|\Gamma| \quad .$
- Minimisation : $\Gamma_S = \{n, |\langle Y, b_n\rangle| \geq \sqrt{\frac{\lambda_N}{N}}\}$ (seuillage) et $F_S = Y_{\Gamma_S}$.
- Cadre de la sélection de modèles avec $\mathrm{pen}(m) = \frac{\lambda_N}{N}\dim(m)$:

$$F_S = \underset{P_m Y,\ m \in \mathcal{M}_N}{\mathrm{argmin}} \|Y - P_m Y\|^2 + \mathrm{pen}(m) \quad .$$

- Collection $\mathcal{M}_N$ des modèles m : ensemble des sous-espaces engendrés par les N vecteurs de base.
- **Théorème (*Barron, Birgé, Massart*) :** Pour $\lambda_N = \lambda \log N$ avec λ assez grand,

$$E(\|f - F_S\|^2) \leq C \min_{m \in \mathcal{M}_N} \|f - P_m f\|^2 + \lambda \frac{\log N}{N} \dim(m) \quad .$$

- Cadre permettant de travailler dans plusieurs bases à la fois...

Sélection de modèles

- **Théorème (*Barron, Birgé, Massart*) :** Si la collection $\mathcal{M}_N$ de modèles m satisfait une inégalité de Kraft pour des coefficients $\lambda_{N,m}$ $(\sum_{m\in\mathcal{M}_N} e^{-\lambda_{N,m}\dim(m)} < +\infty)$ alors

$$F_S = \underset{P_mY,\ m\in\mathcal{M}_N}{\operatorname{argmin}} \|Y - P_mY\|^2 + (C_1 + C_2\lambda_{N,m})\frac{\dim(m)}{N}$$

satisfait

$$E(\|f - F_S\|^2) \leq C \min_{m\in\mathcal{M}_N} \|f - P_mf\|^2 + (C_1 + C_2\lambda_{N,m})\frac{\dim(m)}{N} \quad .$$

- **Théorème (Maxiset) :**

$$E(\|f - F_S\|^2) \leq C\left(\frac{\lambda_N}{N}\right)^{\frac{\beta}{\beta+1}}$$

$$\Leftrightarrow \min_{m\in\mathcal{M}_N} \|f - P_mf\|^2 + (C_1 + C_2\lambda_N)\frac{\dim(m)}{N} \leq C\left(\frac{\lambda_N}{N}\right)^{\frac{\beta}{\beta+1}}$$

$$\Leftrightarrow \min_{m\in\mathcal{M}_N} \|f - P_mf\|^2 + T^2\dim(m) \leq C\left(T^2\right)^{\frac{\beta}{\beta+1}}$$

$$\Leftrightarrow \|f - f_M\|^2 \leq CM^{-\beta} \Leftrightarrow f \in \mathcal{A}^{\beta} \quad .$$

Estimation géométrique

- Contrôle polynomial en fonction de N sur le nombre total de bandelettes.
- Sélection de bandelettes :

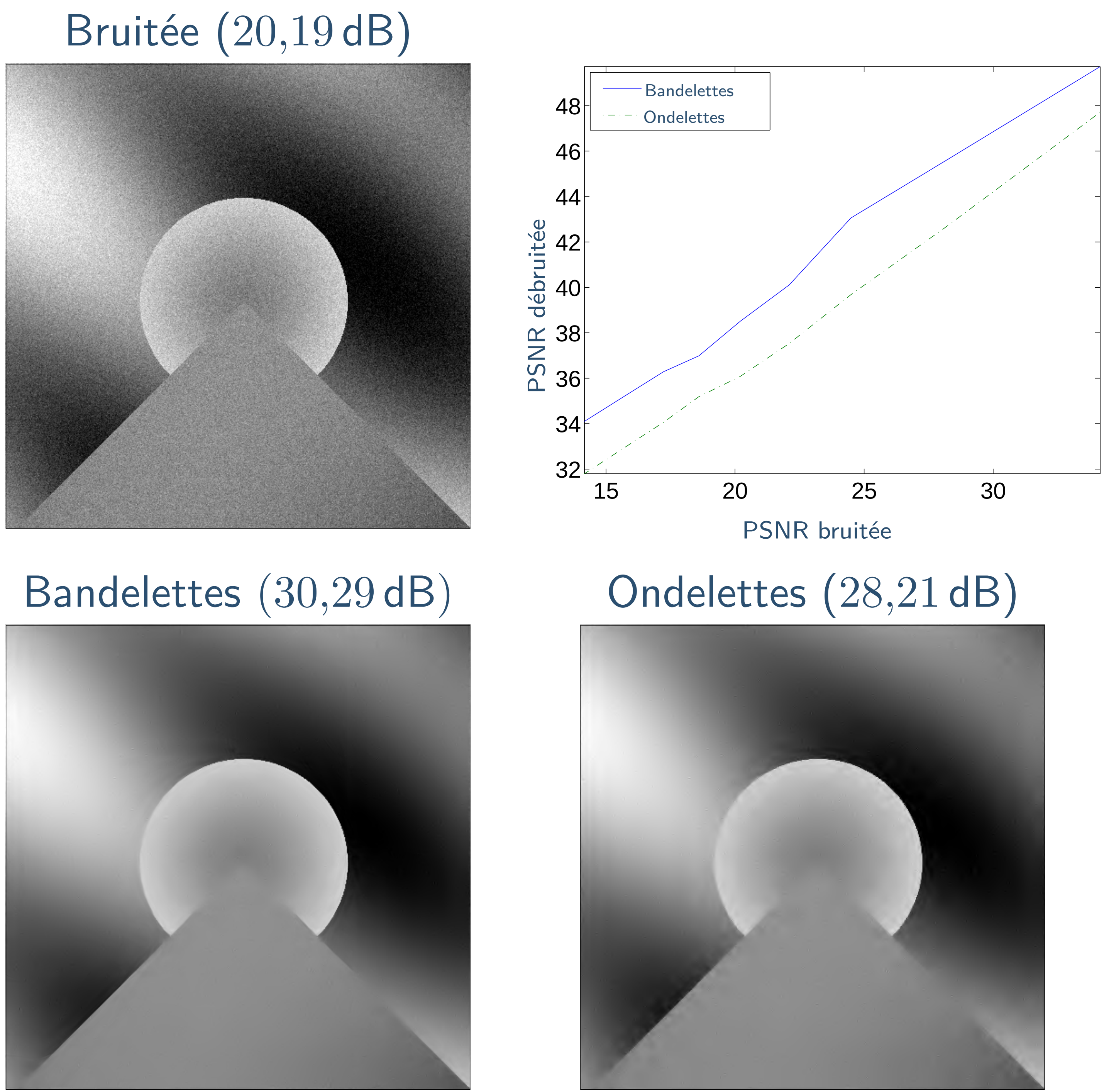
$$F_S = \operatorname{argmin} \|Y - P_{\mathcal{M}} Y\|^2 + \lambda \frac{\log N}{N} \mathrm{dim}(\mathcal{M})$$

  avec $\mathcal{M}$ qui contient les sous-espaces des bases de bandelettes.
- Minimisation à 2 étages :
  - à base fixée, seuillage (facile),
  - recherche de meilleure base (difficile).
- Structure hiérarchique de la partition et additivité de la fonction à minimiser : algorithme de meilleure base de Wickerhauser (CART).
- Exploration exhaustive des géométries dans chaque carré.
- Quasi optimalité : si $f \in \mathbf{C}^\alpha - \mathbf{C}^\alpha$ alors

$$E(\|f - F_S\|^2) \leq C \left(\frac{\log N}{N}\right)^{\frac{\alpha}{\alpha+1}} \quad .$$

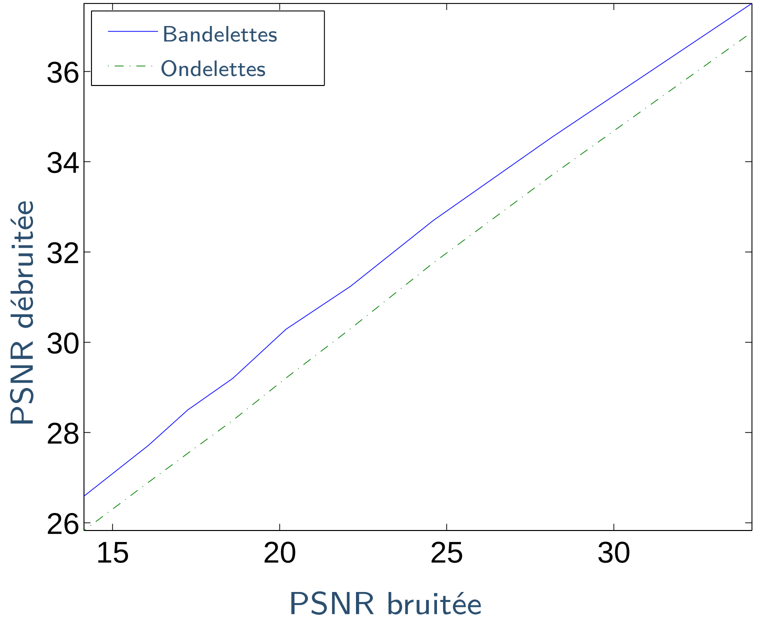
- Maxiset :

$$E(\|f - F_S\|^2) \leq C \left(\frac{\log N}{N}\right)^{\frac{\alpha}{\alpha+1}} \Leftrightarrow f \in \mathcal{A}^{\alpha} \Leftrightarrow \forall M, \exists \mathcal{B}, \|f - f_M\|^2 \leq C M^{-\alpha} \quad .$$



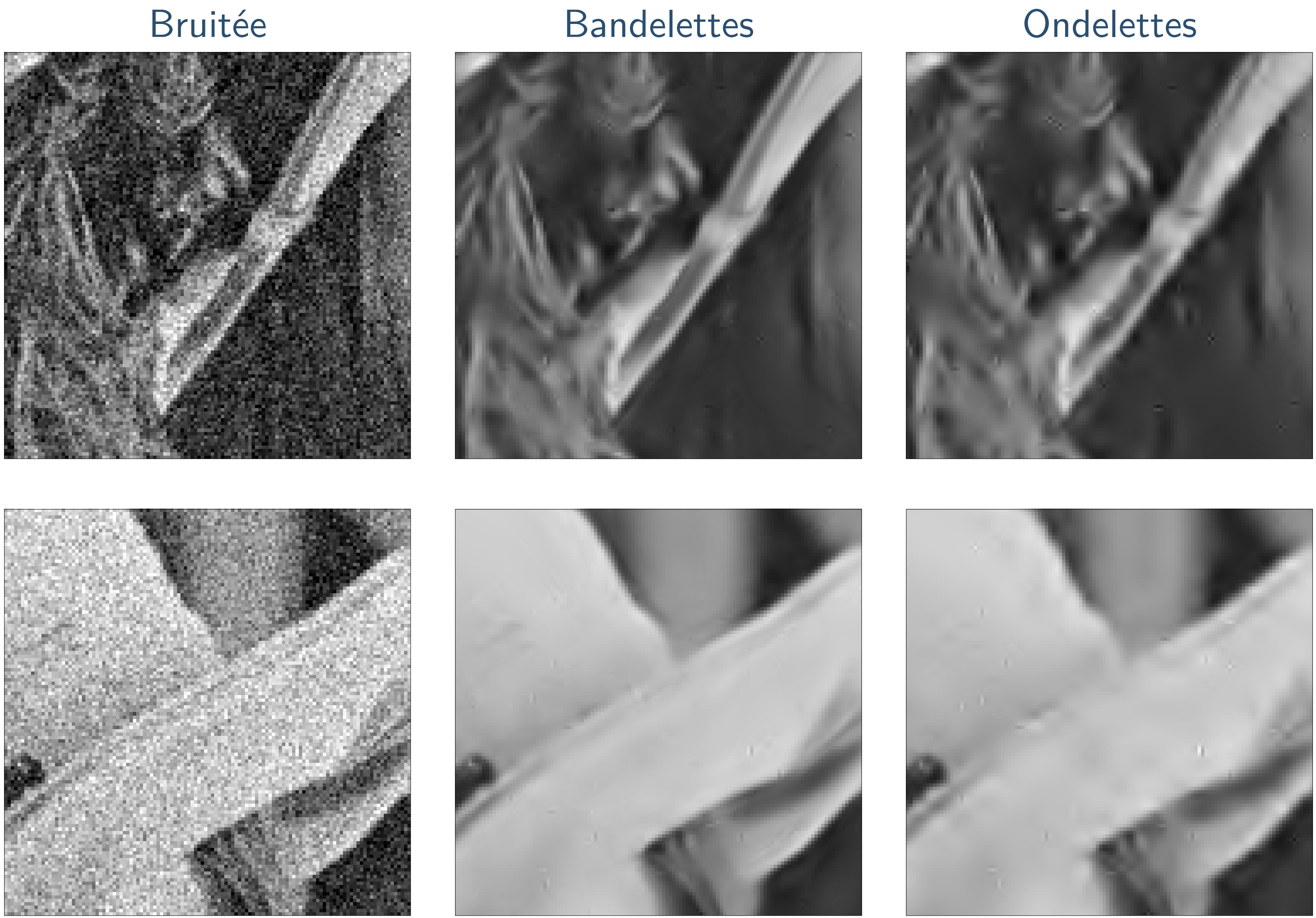
Bruitée (20,19 dB)
Bandelettes
Ondelettes
48
46
44
42
40
38
36
34
32
15
20
25
30
PSNR débruitée
PSNR bruitée
Bandelettes (30,29 dB)
Ondelettes (28,21 dB)

Bruitée $(20{,}19\,\mathrm{dB})$

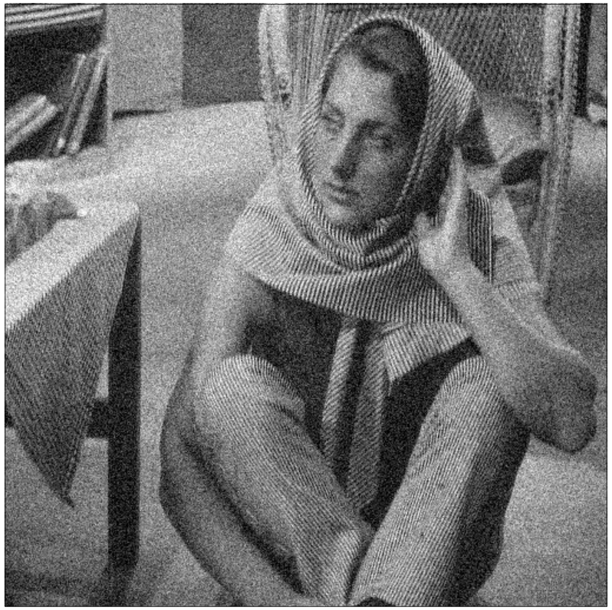


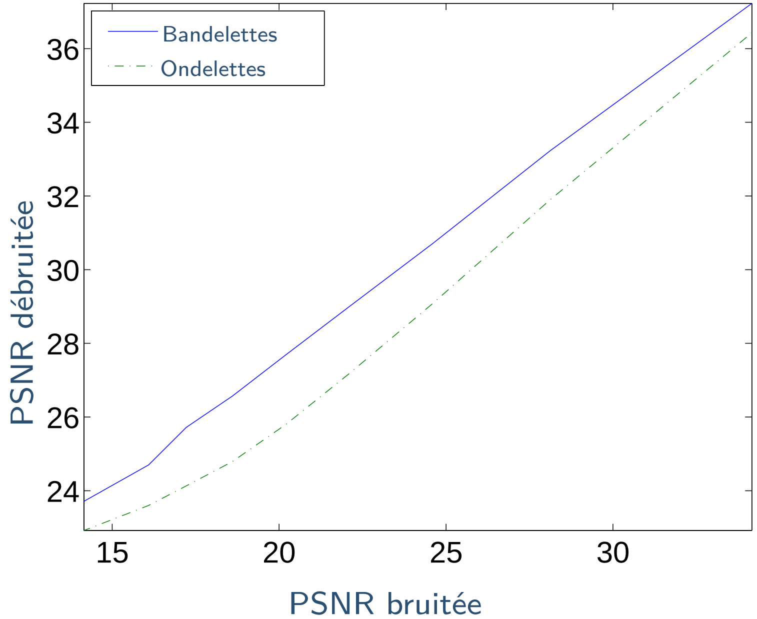
Bandelettes $(30{,}29\,\mathrm{dB})$

Ondelettes $(28{,}21\,\mathrm{dB})$


Bruitée
Bandelettes
Ondelettes

Bruitée $(20{,}19\,\mathrm{dB})$

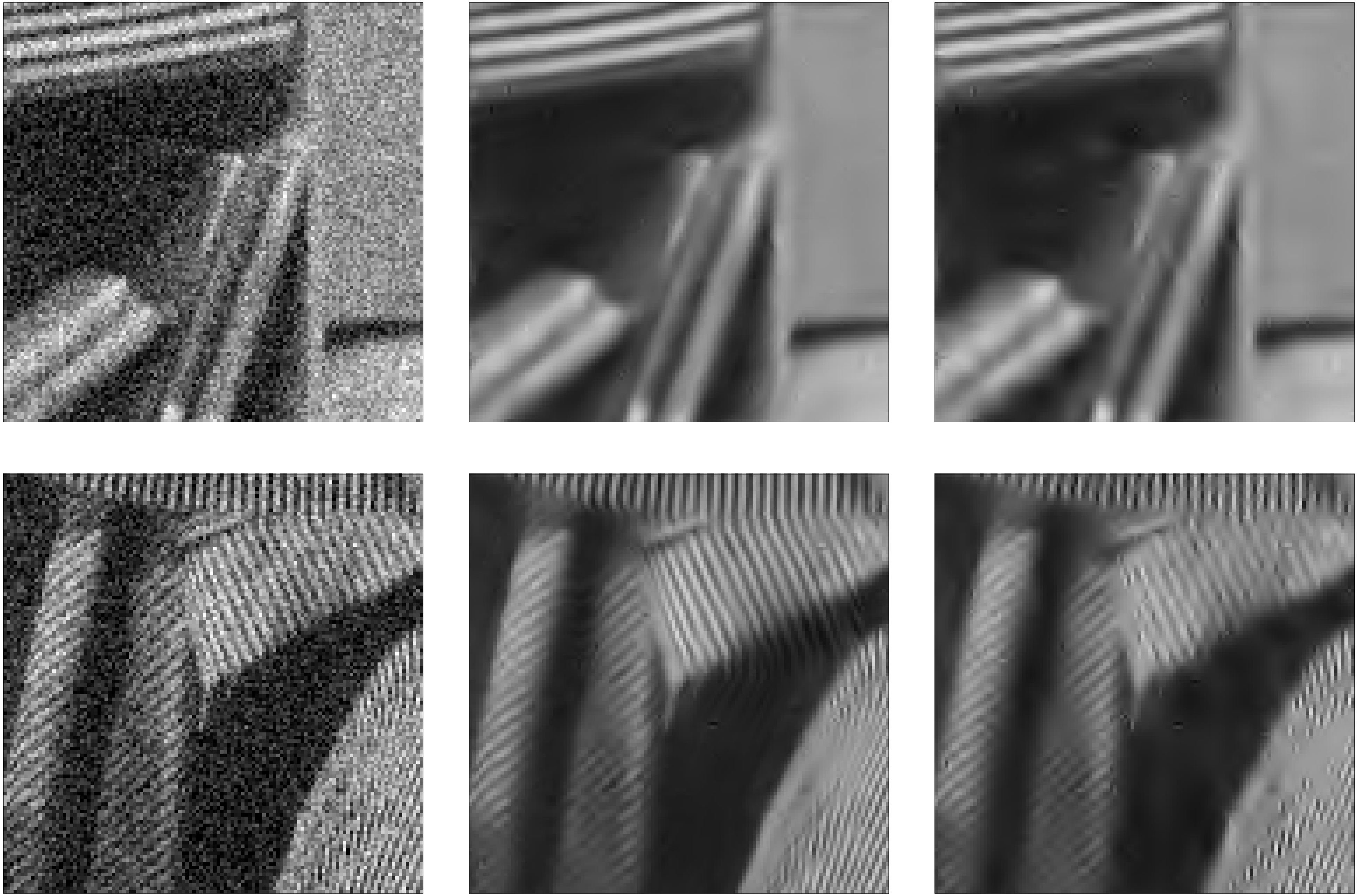




Bandelettes $(27{,}68\,\mathrm{dB})$

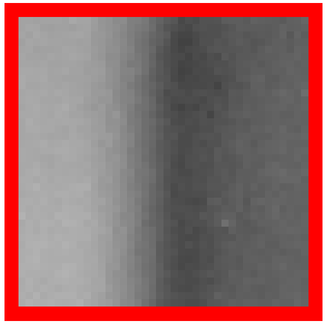
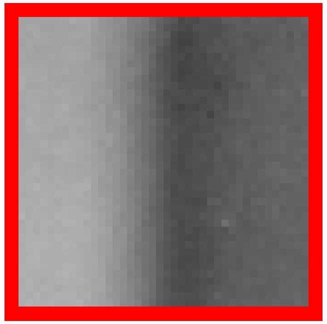
Ondelettes $(25{,}79\,\mathrm{dB})$

Bruitée | Bandelettes | Ondelettes

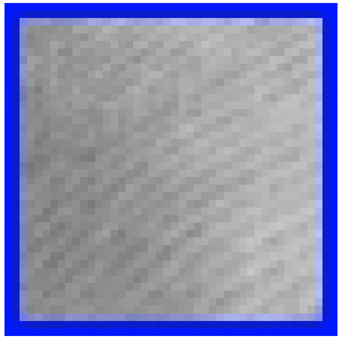
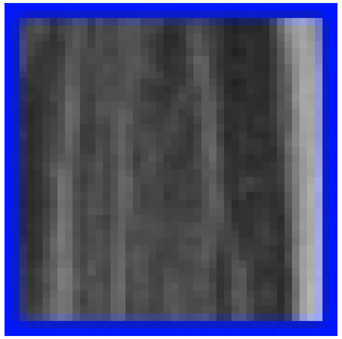
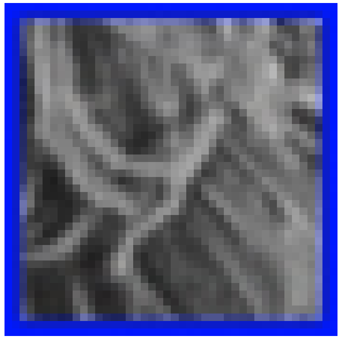


Vers des images plus nature

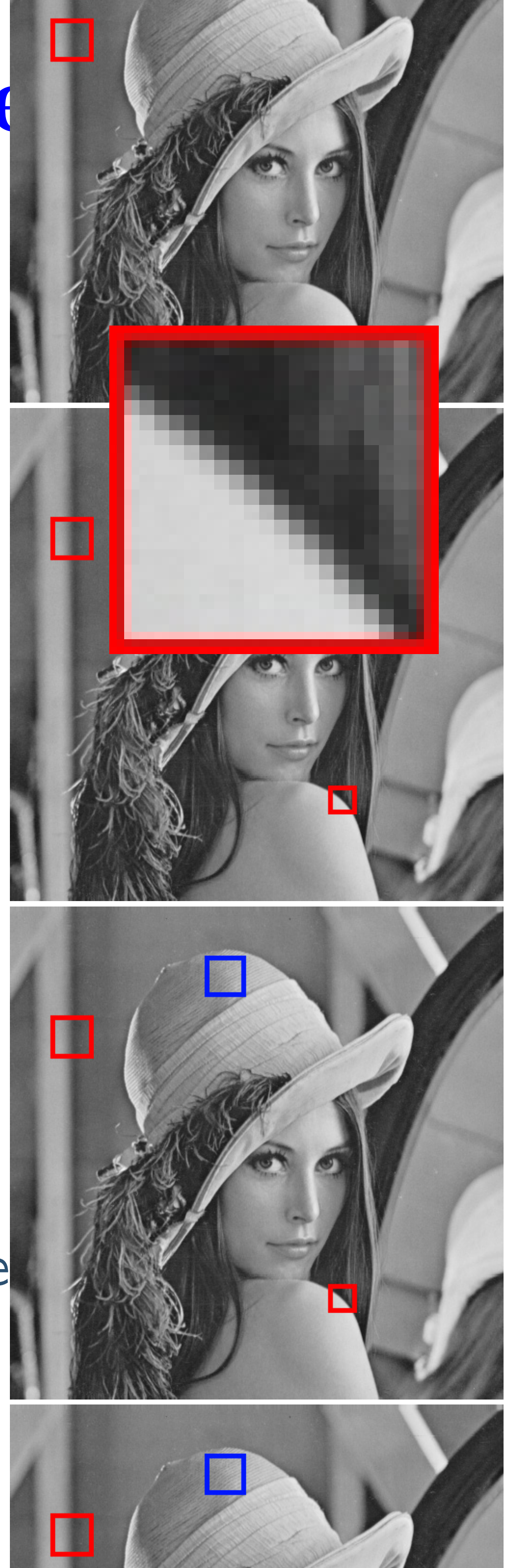
- Modèle $\mathbf{C}^\alpha - \mathbf{C}^\alpha$ simpliste.
- Les contours sont flous :

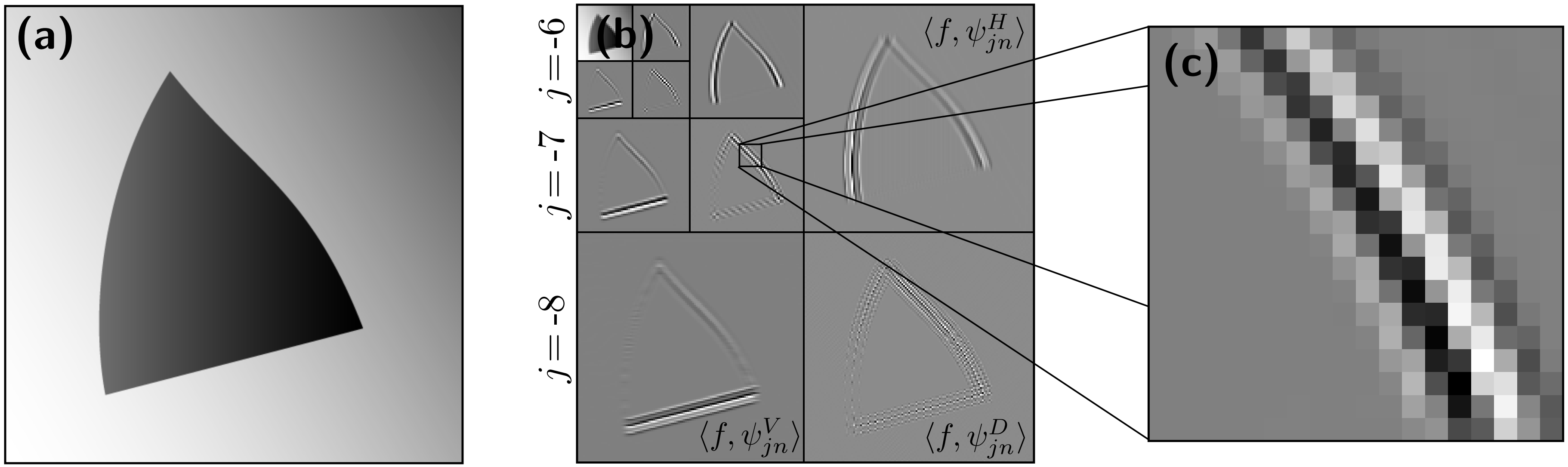
- Pas un problème pour les bandelettes.
- La géométrie vie à plusieurs échelles :

- Comment incorporer une géométrie multiéchelle ?
- Comment éviter les effets de bords sans perdre l'orthogonalité ?

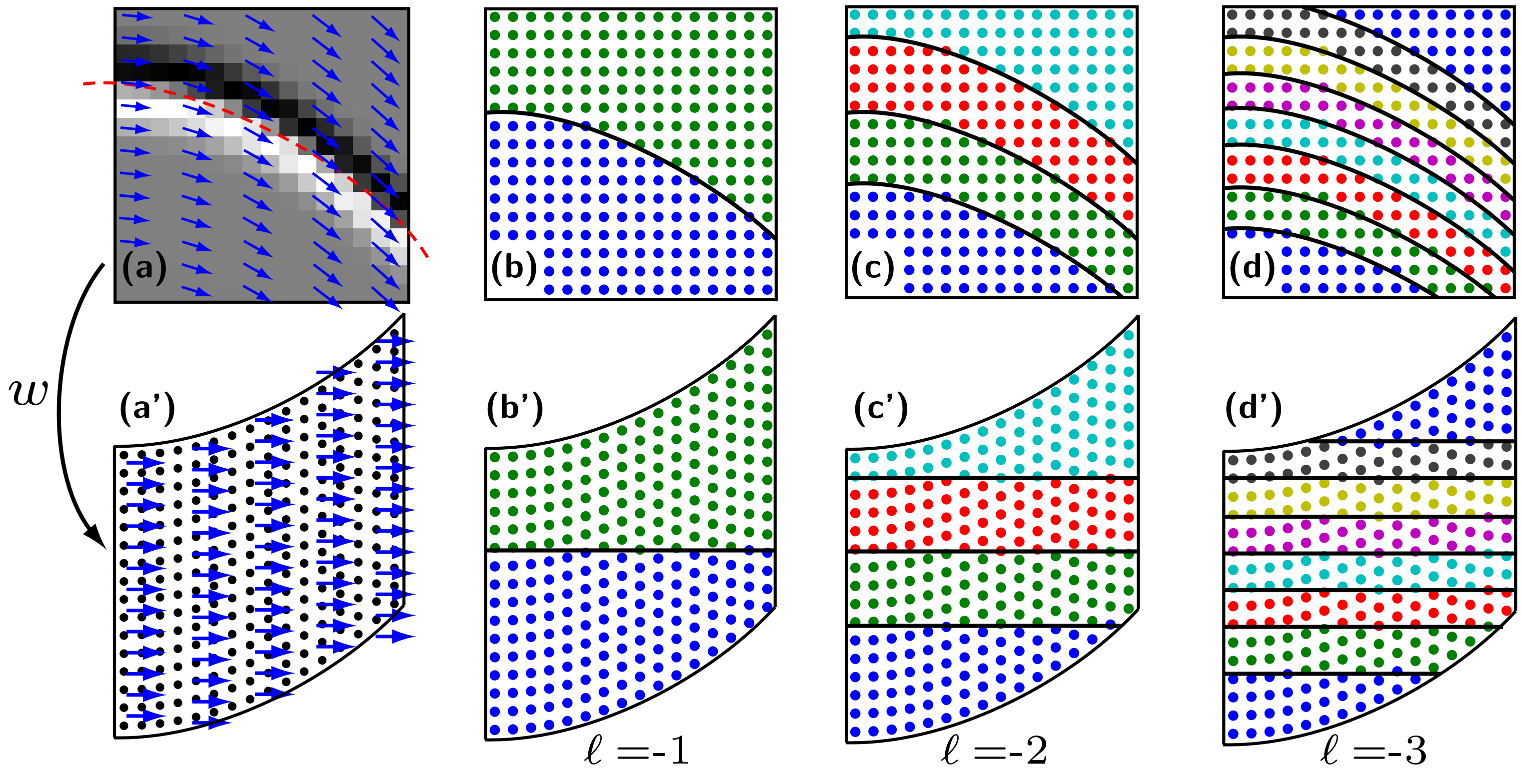


Retour vers les ondelettes



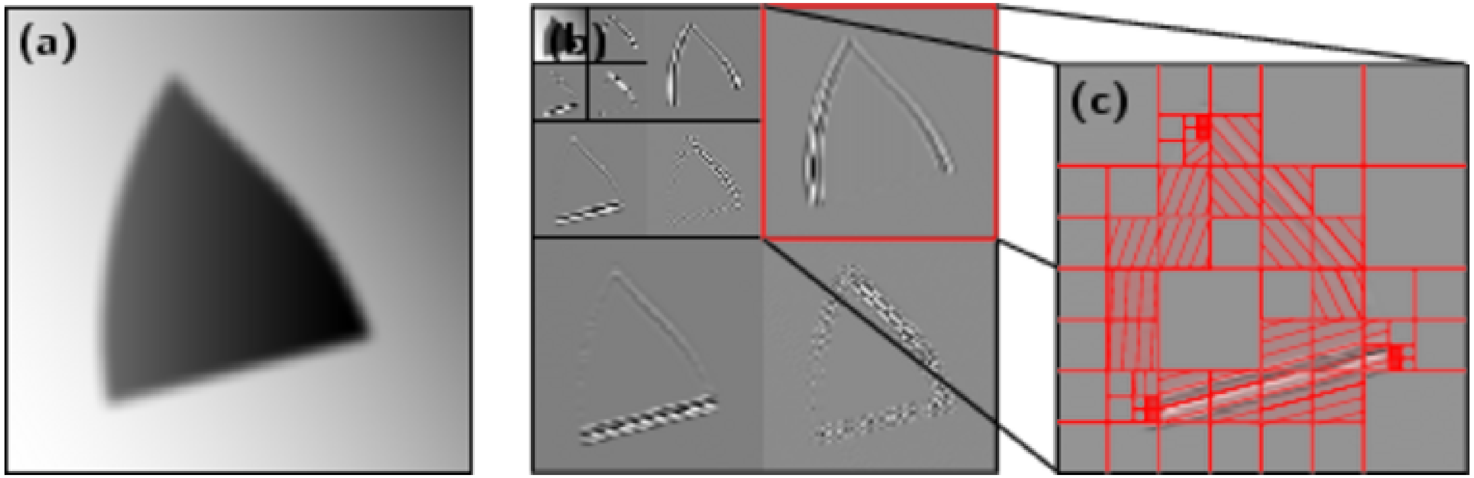
- Ondelettes : bonne représentation multiéchelles.
- Analogie avec le système visuel.
- Existence de régularité pour les coefficients d'ondelettes.
- Comment l'exploiter ?
- Utilisation du contexte dans JPEG 2000.
- Edgeprint (*Vetterli, Dragotti, Baraniuk*) : modélisation explicite dans le contexte du codage.
- Bandelettes sur les coefficients ?

Base locale de bandelettes



- Bandelettes 2G (*Peyré*) : Changement de base orthogonale adapté à la géométrie sur les coefficients d'ondelette.
- Multirésolution d'espaces d'approximations polynomiales par morceaux.
- Base des compléments orthogonaux de ces espaces (*Alpert*).
- Image des ondelettes par ce changement de bases : bandelettes 2G.

Base de bandelettes 2G



- Base de bandelettes :
  - segmentation dyadique des sous-bandes,
  - géométrie dans chaques carrés.
- Algorithme d'optimisation par programmation dynamique (CART) de

$$\|f - f_M\|^2 + T^2 M \quad .$$

- **Théorème :** Si f est $\mathbf{C}^\alpha - \mathbf{C}^\alpha$, alors, dans la meilleure base,

$$\|f - f_M\|^2 \leq C M^{-\alpha}$$

Estimation en bandelettes 2G

- Contrôle polynomial en fonction de N sur le nombre total de bandelettes.
- Estimation par sélection de modèle :

$$F_S = \operatorname{argmin} \|Y - P_{\mathcal{M}} Y\|^2 + \lambda \frac{\log N}{N} \mathrm{dim}(\mathcal{M})$$

  avec $\mathcal{M}$ qui parcourt les sous-espaces d'une famille de bases de bandelettes 2G.
- Quasi optimalité : si $f \in \mathbf{C}^\alpha - \mathbf{C}^\alpha$ alors

$$E(\|f - F_S\|^2) \leq C \left(\frac{\log N}{N} \right)^{\frac{\alpha}{\alpha+1}} \quad .$$

- Maxiset :

$$E(\|f - F_S\|^2) \leq C \left(\frac{\log N}{N} \right)^{\frac{\alpha}{\alpha+1}} \Leftrightarrow f \in \mathcal{A}^{\alpha} \Leftrightarrow \forall M, \exists \mathcal{B}, \|f - f_M\|^2 \leq C M^{-\alpha} \quad .$$

- Conjecture : $f \in \mathcal{A}^{\beta} \Leftrightarrow \exists \mathcal{B}, \forall M, \|f - f_M\|^2 \leq C M^{-\beta}$!
- Expérimentation numérique en cours...

Conclusion

- Rôle central de l'approximation en traitement du signal via les bases (estimation, compression,. . .).
- Nécessité d'avoir une représentation adaptée au signal.
- Pour les images, importance de la géométrie.
- Bandelettes : une représentation adaptée à la géométrie des images.
- Minimax ou Maxiset ? : quelles représentations pour un problème ou quels problèmes pour une représentations ?
- Qu'estiment bien les bandelettes ? Les images qui s'approchent bien en bandelettes !
- Problèmes ouverts :
  - Caractérisation fonctionnelle des espaces d'approximation en bandelettes.
  - Autres pénalisations (l_1,. . .).